数理解析研究所講究録
1024巻 1998年 48-54

Quantum Algebra の複素化，Quantum Double について，

福岡大・理　　黒瀬　秀樹

Quantum Double とは1つの量子群を“重ねる”ことにより新しい量子群を作るある方法を意味し，Drinfeld による．Lie 群および Lie 環の複素化に相当するものはこの範疇にはいる．

Compact quantum Lie group の複素化に相当するものはいくつかのレベルで既によく理解できている．
例えば Hopf *-algebra のレベルで述べると， real coquasitriangular Hopf *-algebra $\mathcal{A}$ に対して，新しい Hopf *-algebra

$\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A}$ （ $=\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ as coalgebra, ある deformed product をもつ ）

が構成でき， Hopf *-algebra $\mathcal{A}$ が compact quantum Lie group に対応するものであれば $\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A}$ はその複素化に対応している．(c.f. [DSWZ], [Po], [WW], etc.)
また von Neumann algebra (Woronowicz algebra) のレベルでは，Nakagami [Na] による compact Woronowicz algebra の Double Group Construction があり，これが，compact quantum Lie group の複素化に相当している．

一方，Quantum Enveloping Algebra の複素化については, [DSWZ], [WW], [KN] 等で扱われているものの，充分理解されているとは言い難い． compact quantum Lie group に対応する Hopf *-algebra $\mathcal{A}$ と dual pair をなす Hopf *-algebra $\mathcal{U}$ で quantum enveloping algebra を表わすものがあるとき， $\mathcal{A}$ の複素化が $\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A}$ であるならば， $\mathcal{U}$ の複素化を $\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$ としたいところであるが， $\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$ には一般に $\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A}$ と dual pair となるような deformed coproduct が入らない．
(我々の議論において， Deformation parameter に関する形式的べき級数は用いない，また $\mathcal{U}$ は一般に quasitriangular ではない．） $\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$ の代わりに， $\mathcal{A}\bowtie\mathcal{A}$ と dual pair をなす Hopf *-algebra を探す必要がある． 以下では，少し一般的な設定の下で，Hopf *-algebra レベルにおける quantum double の議論を利用して，quantum enveloping algebra の複素化について述べることにする．Majid の本[Maj] の7章の内容と大きく重複するので興味のある方は参照されたい．

1. Twisted Tensor Products, Quantum Doubles

以下に使う記号を少し説明しておく．Hopf algebra $\mathcal{A}=(\mathcal{A}, m, \delta, \varepsilon, \kappa)$ を記述する記号として，

$$\begin{array}{lll} m & ;\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A} & :\ \mathcal{A}\text{ の積}, \\ \delta & ;\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & :\ \mathcal{A}\text{ の余積}, \\ \varepsilon & ;\mathcal{A}\longrightarrow\mathbf{C} & :\ \mathcal{A}\text{ の余単位元}, \\ \kappa & ;\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A} & :\ \text{antipode}, \end{array}$$

を用いる．

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: Hopf algebras に対して，tensor product $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ は

積　$\boldsymbol{m}=(m_{\mathcal{A}}\otimes m_{\mathcal{B}})(\iota_{\mathcal{A}}\otimes\sigma\otimes\iota_{\mathcal{B}})$,

余積　$\boldsymbol{\delta}=(\iota_{\mathcal{A}}\otimes\sigma\otimes\iota_{\mathcal{B}})(\delta_{\mathcal{A}}\otimes\delta_{\mathcal{B}})$

の下で Hopf algebra となる．ただし，σ は flip map である．ここで，σ の代わりにある linear map $S:\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ を用いて新しい積 $\boldsymbol{m}_S$;

$$\boldsymbol{m}_S=(m_{\mathcal{A}}\otimes m_{\mathcal{B}})(\iota_{\mathcal{A}}\otimes S\otimes\iota_{\mathcal{B}})$$

を $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ に定義し（余積は変形せずそのままにして），新しい Hopf algebra $\mathcal{A}\bowtie_S\mathcal{B}$ を構成することを考える．

定義. bilinear form s ; $\mathcal{B}\times\mathcal{A}\longrightarrow\mathbf{C}$ が Hopf algebras $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ に対する skew pairing であるとは，$b, b'\in\mathcal{B}$, $a, a'\in\mathcal{A}$ に対して

$$s(bb', a)=s(b\otimes b', \delta(a))$$
$$s(b, aa')=s(\sigma\delta(b), a\otimes a')$$

が成立するときをいう．

Hopf *-algebras $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ に対する skew pairing s が antireal であるとは，s が

$$\overline{s(b^*, a^*)}=s(\kappa(b), a)=s(b, \kappa^{-1}(a))$$

を満たすときをいう．また，Hopf *-algebras $\mathcal{A}$ とそれ自身の skew pairing s が

$$\overline{s(b^*, a^*)}=s(a, b)$$

を満たすとき，s は real という．

定理. (c.f. 例えば [Maj])
Hopf algebras $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ に対する skew pairing s に対して、

$$S(b\otimes a)\equiv\Sigma_{(a)(b)}s(\kappa_{\mathcal{B}}(b_{(1)}),a_{(1)})\,s(b_{(3)},a_{(3)})\,a_{(2)}\otimes b_{(2)}\ ,$$
$$m_s\ \equiv(m_{\mathcal{A}}\otimes m_{\mathcal{B}})(\iota_{\mathcal{A}}\otimes S\otimes\iota_{\mathcal{B}})$$

で$S;\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, $m_s;(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\otimes(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\longrightarrow\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ を定義すると、m_s は $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ に associative な積を定める. さらに,

$$\delta\ \equiv(\iota_{\mathcal{A}}\otimes\sigma\otimes\iota_{\mathcal{B}})(\delta_{\mathcal{A}}\otimes\delta_{\mathcal{B}})$$
$$\kappa_s\equiv S\ \circ\sigma\circ(\kappa_{\mathcal{A}}\otimes\kappa_{\mathcal{B}})$$

とおくと, $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},m_s,\delta,\kappa_s)$ は Hopf algebra となる. (これを $\mathcal{A}\bowtie_s\mathcal{B}$ とかくことにする.)

Hopf *-algebras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ の skew pairing s が antireal であるとき, involution

$$*\equiv S\circ\sigma\circ(*_{\mathcal{A}}\otimes *_{\mathcal{B}})$$

の下で $\mathcal{A}\bowtie_s\mathcal{B}$ は Hopf *-algebra となる.
$\mathcal{B}=\mathcal{A}$ で, $\mathcal{A}$ とそれ自身の間の skew pairing s が real である特別な場合には, involution

$$*\equiv\sigma\circ(*_{\mathcal{A}}\otimes *_{\mathcal{A}})$$

の下で $\mathcal{A}\bowtie_s\mathcal{A}$ は Hopf *-algebra となる.

例. $s(b,a)\ =\varepsilon(b)\,\varepsilon(a)$ なる skew pairing s を用いると、 $\mathcal{A}\bowtie_s\mathcal{B}=\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.

例. $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ は invertible antipode をもつ Hopf algebras であり, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ は Hopf algebra として pairing をなしているものとする. このとき, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ の間の pairing $<,>$ は $\mathcal{U}$ と $\mathcal{A}^{op}$, $\mathcal{U}^{cop}$と $\mathcal{A}$ それぞれの間の skew pairing を与える. ただし, $\mathcal{A}^{op}$ は $\mathcal{A}$ の積を逆にして得られる Hopf algebra, $\mathcal{U}^{cop}$ は $\mathcal{U}$ の余積を逆にして得られる Hopf algebra である. 上の定理により, Hopf algebras

$$\mathcal{U}\bowtie\mathcal{A}^{op},\qquad \mathcal{U}^{cop}\bowtie\mathcal{A},$$

を得る. (paring は canonical なものであるから, pairing の記号は省略する.)
さらに $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ が Hopf *-algebras であり,

$$<\varphi,a^*>=<\kappa(\varphi)^*,a\ >^-,\qquad <\varphi^*,a\ >=<\varphi,\kappa(a)^*>^-,$$

が成立と仮定する. このとき, $\mathcal{U}^{cop}$ と $\mathcal{A}$ の間の skew pairing $<,>$ は anti-real であり, Hopf *-algebra $\mathcal{U}^{cop}\bowtie\mathcal{A}$ をえる.

$\mathcal{U}$, $\mathcal{A}^{op}$ の間の skew pairing <, > の方はそのままでは anti-real ではないが，$\mathcal{A}^{op}$ の involution として $*\circ\kappa^2$ をとれば，skew pairing <, > は anti-real となり，Hopf *-algebra $\mathcal{U} \bowtie \mathcal{A}^{op}$ をえる．

もう一つの重要な例として(real) coquasitriangular Hopf (*-)algebra に関するものがある．

定義． Hopf algebra $\mathcal{A}$ が coquasitriangular であるとは次の条件(i),(ii)が満たされるとき．

(i) $\exists$ skew pairing s ; $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$

(ii) quasicommutative , i.e.,

$$\Sigma_{(a)(b)} b_{(1)} a_{(1)} s(a_{(2)}, b_{(2)}) = \Sigma_{(a)(b)} s(a_{(1)}, b_{(1)}) a_{(2)} b_{(2)}.$$

coquasitriangular Hopf *-algebra $\mathcal{A}$ に付随する skew paring が real であるとき，$\mathcal{A}$ も real であるという．

上の定理より，(real) coquasitriangular Hopf (*-)algebra $\mathcal{A}$ に対しては，Hopf (*-)algebra $\mathcal{A} \bowtie_s \mathcal{A}$ を得る．

2. Doubles for coquasitriangular Hopf algebra $\mathcal{A}_R$

このセクションでは FRT formalism により，YB-matrix $R \in M_n(\mathbf{C}) \otimes M_n(\mathbf{C})$ から構成される coquasitriangular Hopf algebra $\mathcal{A}_R$ に対する double を考える．

$\mathcal{A}_R$ は次の条件を満たすことを仮定する．

(i) $\mathcal{A}_R$ は t_{ij} $(i, j = 1, \cdots, n)$ を生成元にもち，$\{t_{ij}\}$は関係式：

$$R\, T_1 T_2 = T_2 T_1 R \quad \text{in} \quad M_n(\mathbf{C}) \otimes M_n(\mathbf{C}) \otimes \mathcal{A}_R \; .$$

を満たす．ただし， $T = (t_{ij}) \in M_n(\mathbf{C}) \otimes \mathcal{A}_R$ ， $T_2 = I \otimes T$， $T_1 = \sigma_{12}(I \otimes T)$.

(ii) $\delta(t_{ij}) = \Sigma_k t_{ik} \otimes t_{kj}$, $\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$.

(これらは$\delta(T) = T \dot{\otimes} T$, $\varepsilon(T) = 1$ としばしば略記される．)

(iii) $s(T_1, T_2) = R$ in $M_n(\mathbf{C}) \otimes M_n(\mathbf{C})$ を満たす $\mathcal{A}_R$ とそれ自身の間の skew pairing s が存在．

このとき s は自動的に $\mathcal{A}_R$ に coquasitriangularity をあたえる．実際，交換関係 (i) は quasi commutativity に他ならない．

Hopf algebra $\mathcal{A}_R$ 上の linear functionals $l^{(\pm)}{}_{ij}$ $(i, j = 1,\cdots,n)$を次で定義;

$$< L^{(\pm)}{}_0 , T_1 \cdots T_k > = R^{(\pm)}_{01} \cdots R^{(\pm)}_{0k} \quad \text{in} \quad M_n(\mathbf{C}) \otimes \cdots \otimes M_n(\mathbf{C}) \quad (\text{k+1times}).$$

ただし、

$$L^{(\pm)} = (l^{(\pm)}_{ij}) \in M_n(\mathbf{C}) \otimes \mathcal{A}_R', \quad (\ L^{(\pm)}\text{は L matrix とよばれる．})$$

$$R^{(+)} = R^{\sigma} = \sigma R\, \sigma \quad , R^{(-)} = R^{-1} \quad (\text{ さらに必要ならば,} \quad \det R \ = 1).$$

$\{l^{(\pm)}{}_{ij}\}$ により生成される dual convolution algebra $\mathcal{A}_R'$ の unital subalgebra を $\mathcal{U}_R$ とすれば，$\mathcal{U}_R$ には $\mathcal{A}_R$ と pairing をなすように Hopf algebra の構造が入る．

４番目の仮定は

(iv) $\mathcal{U}_R$ と $\mathcal{A}_R$ の pairing は nondegenerate.

特に，R が real. , i.e., $R^* = R^{\sigma}$ のときは，

(*) $T^* = \kappa(T)$, i.e., $t_{ji}{}^* = \kappa(t_{ij})$ なる involution の下で $\mathcal{A}_R$ は Hopf *-algebra.

であることも仮定する．このとき，$\mathcal{U}_R$ には left involution ,i.e.,

$$\varphi^* = \varphi(\ \kappa(\cdot\ )^*)^-$$

を与え，Hopf *-algebra とする．

以上の仮定の下に議論を行う．

s が skew pairing であることより，次の２つの map

$$i \ \ ; a \in \mathcal{A}_R \longrightarrow s(\,a, \cdot\ ) \in \mathcal{A}_R'.$$

$$j \ \ ; a \in \mathcal{A}_R \longrightarrow s(\kappa(\cdot\,), a) \in \mathcal{A}_R'$$

は $\mathcal{A}_R \longrightarrow \mathcal{U}_R^{\mathrm{cop}}$ なる Hopf algebra homomorphism である．これらを用いて次を得る．

定理．(c.f. [Maj] Ch.7) Hopf algebra $\mathcal{A}_R \bowtie_s \mathcal{A}_R$ に対して，

(i) map $m \ : \ a \otimes b \in \mathcal{A}_R \bowtie_s \mathcal{A}_R \ \longrightarrow ab \in \mathcal{A}_R$,

は Hopf algebra homomorphism.

(ii) map $m_{\mathcal{U}} \circ (j \otimes i) : a \otimes b \in \mathcal{A}_R \bowtie_s \mathcal{A}_R \ \longrightarrow j(a) i(b) \in \mathcal{U}_R{}^{\mathrm{cop}}$.

は Hopf algebra homomorphism.

(iii) map $f \equiv \{ m \otimes (m_{\mathcal{U}} \circ (j \otimes i))\} \circ \delta \ : \mathcal{A}_R \bowtie_s \mathcal{A}_R \ \longrightarrow \mathcal{A}_R \otimes \mathcal{U}_R{}^{\mathrm{cop}}$.

は unital algebra homomorphism .

さらに，s が real ならば，上の３つの map はいずれも*-invariant .

定理．(c.f. [Maj] Ch. 7)
Hopf algebra $\mathcal{U}_R \bowtie \mathcal{A}_R{}^{op}$ に対しては,

(i) map $((i \circ \kappa_{\mathcal{A}}) \otimes (j \circ \kappa_{\mathcal{A}}))\, \delta_{\mathcal{A}}\,;\, \mathcal{A}_R{}^{op} \longrightarrow \mathcal{U}_R \otimes \mathcal{U}_R$,
は Hopf algebra homomorphism.

(ii) map $g \equiv m_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}} \circ \sigma_{23} \circ (\delta_{\mathcal{U}} \otimes ((i \circ \kappa_{\mathcal{A}}) \otimes (j \circ \kappa_{\mathcal{A}})) \circ \delta_{\mathcal{A}})\,;\, \mathcal{U}_R \bowtie \mathcal{A}_R{}^{op} \longrightarrow \mathcal{U}_R \otimes \mathcal{U}_R$
は unital algebra homomorphism.

さらに, s が real のとき, $\mathcal{U}_R$ に left involution, $\mathcal{A}_R{}^{op}$ に involution $* \circ \kappa_{\mathcal{A}}{}^2$ を与えると, ($\mathcal{U}_R \bowtie \mathcal{A}_R{}^{op}$ は Hopf *-algebra となり,) 上の２つの map はいずれも *-invariant .

上の２つ定理における homomorphisms f, g に関して, 次の結果を得る.

定理.
$x \otimes y \in \mathcal{A}_R \bowtie_s \mathcal{A}_R$, $\varphi \otimes a \in \mathcal{U}_R \bowtie \mathcal{A}_R{}^{op}$ に対して, 次が成立.

$$< f(x \otimes y), \varphi \otimes a > = < x \otimes y, g(\varphi \otimes a) > \quad .$$

この値を $<< x \otimes y, \varphi \otimes a >>$ と書くと, $\mathcal{A}_R \bowtie_s \mathcal{A}_R \times \mathcal{U}_R \bowtie \mathcal{A}_R{}^{op}$ 上の bilinear form $<<,>>$ は Hopf (*-)algebra としての pairing を与える.

3. Nondegeneracy of the pairing $<<,>>$, factorization

(real) coquasitriangular Hopf (*-)algebra $\mathcal{A}_R$ に対して,

$$k \equiv (s \circ \sigma) * s \quad \in (\mathcal{A}_R \otimes \mathcal{A}_R)'$$

で定義される bilinear form k は quantum Killing form とよばれる. ここで, s は $\mathcal{A}_R$ に付随する skew pairing, 右辺の積は $(\mathcal{A}_R \otimes \mathcal{A}_R)'$ における convolution product である.

次が我々の主要結果である.

定理. 次の5つの条件は同等.

(i-1) $a \in \mathcal{A}_R \longrightarrow k(a, \cdot) \in \mathcal{A}_R{}'$ が injective.

(i-2) $b \in \mathcal{A}_R \longrightarrow k(\cdot, b) \in \mathcal{A}_R{}'$ が injective.

(ii-1) (*-)algebra homomorphism $f; \mathcal{A}_R \bowtie_s \mathcal{A}_R \longrightarrow \mathcal{A}_R \otimes \mathcal{U}_R{}^{\mathrm{cop}}$ が injective.

(ii-2) (*-)algebra homomorphism $g; \mathcal{U}_R \bowtie \mathcal{A}_R{}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{U}_R \otimes \mathcal{U}_R$ が injective.

(iii) $\mathcal{A}_R \bowtie_s \mathcal{A}_R$ と $\mathcal{U}_R \bowtie \mathcal{A}_R{}^{\mathrm{op}}$ の pairing $\langle\langle , \rangle\rangle$ は nondegenerate.

結論. real coquasitriangular Hopf *-algebra $\mathcal{A}_R$ が compact quantum Lie group に対応するものであれば, その複素化は Hopf *-algebra $\mathcal{A}_R \bowtie_s \mathcal{A}_R$ であった. 上の定理の条件が成立する場合, $\mathcal{A}_R$ に対する quantum enveloping algebra $\mathcal{U}_R$ の複素化は Hopf *-algebra $\mathcal{U}_R \bowtie \mathcal{A}_R{}^{\mathrm{op}}$ に対応している.
また [DSWZ], [WW], [KN] で既に与えられている $\mathcal{U}_R$ の複素化は Hopf *-algebra $\mathcal{U}_R \bowtie \mathcal{A}_R{}^{\mathrm{op}}$ に同形なものである.

REFERENCS

[DSWZ] Complex quantum groups and their quantum enveloping algebras, Comm. Math. Phys. 147(1992), 625-633.

[KN] H. Kurose, Y. Nakagami, Compact Hopf *-algebras, quantum enveloping algebras and dual Woronowicz algebras for quantum Lorentz groups , to appear in International J. Math..

[Maj] S. Majid, Foundation s of Quantum Group Theory, Cambridge U. P., 1995.

[Na] Nakagami, Y., Double group construction for compact Woronowicz algebras , International J. Math. 7 (1996), 521-540.

[Po] Podles, P., Complex quantum groups and their real representations, Publ. RIMS 28(1992), 709-745.

[PW] P. Podles and S.L. Woronowicz, Quantum deformation of Lorentz group, Comm. Math. Phys., 130(1990), 381-431.

[WW] Carow-Watamura, U., Watamura, S., Complex quantum groups , dual algebras and bicovariant differential calculus, Comm. Math. Phys. 151 (1993), 487-514.